

## Opleiding Wiskunde Bachelorprojecten 2020-2021

### Titel: De matrix-matrixvermenigvuldiging

Promotor: J. Van der Jeugt, Begeleider: Toon Baeyens  
Vak: Numerieke analyse

In de cursus numerieke analyse heb je geleerd over veel verschillende algoritmen met matrices: stelsels oplossen, eigenwaarden berekenen, decomposities berekenen... Maar er werd bijna niet gesproken over een 'eenvoudigere' bewerking: het vermenigvuldigen van twee matrices.

Toch is deze bewerking efficiënt uitvoeren een bron van uitdagingen. Zo bots je tegen algoritmische inefficiënties, maar ook op de limieten van de computer zelf. In dit bachelorproject zal je verschillende algoritmen en implementaties opzoeken en bestuderen.

Indien je graag programmeert kan er geprobeerd worden om verschillende algoritmen te vergelijken door zelf enkele implementaties te bouwen.

---

### Titel: De sinusintegraalfunctie en uitbreidingen

Promotor: J. Van der Jeugt, Begeleider: Toon Baeyens  
Vak: Numerieke analyse

De sinusintegraalfunctie  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  is gedefinieerd als:  $\text{Si}(z) := \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$ .

Efficiënt en nauwkeurig waarden bepalen van deze functie is verre van triviaal. Deze, er misschien wat arbitrair uitzijnde integraal, komt in tal van toepassingen natuurlijk voor. Zo kan de sinusintegraalfunctie van pas komen bij de berekening van integralen van eigenfuncties van de schrödingervergelijking.

In deze toepassing zijn we in de volgende, meer algemene, reële integralen geïnteresseerd, voor  $n$  een natuurlijk getal:

$$\int_0^x t^{n-1} \sin t \, dt, \quad \int_0^x t^n \cos t \, dt$$

Eenvoudigweg partiële integratie toepassen leidt tot numerieke moeilijkheden. Hiervoor zullen dus nieuwe ideeën gebruikt moeten worden.

In eerste instantie zullen enkele bestaande technieken en implementaties opgezocht en bestudeerd worden om de sinusintegraalfunctie  $\text{Si}$  te berekenen. Indien de student ertoe bereid is, kunnen ook formules uitgewerkt worden voor de laatst vermelde reële integralen.

---

### Titel: Algoritmen uit de computationele meetkunde

Promotor: Veerle Fack  
Vakken: Optimalisatie / Algoritmen en Optimalisatie

Het is de bedoeling om algoritmen te bestuderen voor problemen zoals het bepalen van de convexe omhullende van een puntenverzameling, het bepalen van alle snijpunten van een reeks segmenten in het vlak, het bepalen van een triangulatie van een veelhoek, e.d. Voor deze problemen zijn de eenvoudige exhaustieve algoritmen te traag, maar er bestaan geavanceerde algoritmen die steunen op standaard algoritmische ontwerptechnieken (zoals verdeel-en-heers, gebruik van datastructuren, e.d.) Verder is het ook de bedoeling om de bruikbaarheid van deze algoritmen in toepassingen (bijvoorbeeld in de geografische informatiewetenschappen) te bestuderen.

Referentie:

- Mark de Berg, et al., "Computational Geometry: Algorithms and Applications", Springer, 2008.
- 

### **Titel: Bepaling van de rente met behulp van een convex optimalisatiemodel**

Promotor: prof. Dr. Michèle Vanmaele

Vakken: Financiële wiskunde en Optimalisatie

De bepaling van één enkele rentecurve is een belangrijk en goed bestudeerd probleem van inverteren. Om de aannemelijk rentecurves uit de oneindige reeks van mogelijke rentecurves te selecteren, moeten voorwaartse rentevoeten worden gebruikt in de regularisatie. Door discretisatie van de rentecurve wordt het inverteringsprobleem geformuleerd als een convex optimalisatievraagstuk dat efficiënt kan opgelost worden met behulp van bestaande oplossingstechnieken. Dit convex optimalisatievraagstuk kan onder meer wissels, obligaties, certificaten van deposito's, voorwaartse rente-akkoorden en renteswaps modelleren met behulp van zowel gelijkheid- als ongelijkheidsrestricties afkomstig van vraag- en aanbodkoersen. De bedoeling is om dit convexe optimalisatievraagstuk te bestuderen op basis van het artikel vermeld in de referentie. In het bijzonder is er de vraag of er een globaal extremum kan gevonden worden of enkel een lokaal extremum.

Referentie:

- Jörgen Blomvall: Measurement of interest rates using a convex optimization model, *European Journal of Operational Research* **256**(2017), 308-316, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.053>
- 

### **Titel: Berekening van evenwichtsprijzen voor een 'capital asset pricing model' (CAPM) met heterogene overtuigingen en restricties op de marge-eisen**

Promotor: prof. Dr. Michèle Vanmaele

Vakken: Financiële wiskunde en Optimalisatie

Het 'mean-variance Capital Asset Pricing Model' (CAPM) is een handig wiskundig model om diverse financiële problemen te bestuderen. Om tot analytische oplossingen te komen moeten er heel strenge voorwaarden opgelegd worden of restrictieve onderstellingen gemaakt worden. De bedoeling van dit project is om het numerieke algoritme beschreven in het artikel vermeld in de referenties te bestuderen. Dit numeriek algoritme laat toe om een verzameling van evenwichtsprijzen van een CAPM met heterogene investeerders en willekeurige marge-eisen te berekenen zonder al te veel beperkingen. Het CAPM moet wiskundig geformuleerd worden, eigenschappen van portefeuilleselectie dienen bestudeerd te worden evenals de asymptotische convergentie van het voorgestelde algoritme. Om het nut van het algoritme te illustreren, wordt een gevoeligheidsanalyse op een eenvoudig voorbeeld uitgevoerd. Ten slotte, kan ook in een numerieke luik de prestaties van het algoritme vergeleken worden met die van twee andere populaire methoden, namelijk de 'fixed point' methode en het 'brand-and-bound' algoritme.

Referentie:

- Jun Tong, Jiaqiao Hu, Jianqiang Hu: Computing equilibrium prices for a capital asset pricing model with heterogeneous beliefs and margin-requirement constraints, *European Journal of Operational Research* 256(2017), 24-34, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2016.07.010>

Promotor: prof. Dr. Michèle Vanmaele

Vakken: Financiële wiskunde en/of Optimalisatie

**Een onderwerp gebaseerd op een van de volgende artikels:**

- Ka Chun Cheung, Sheung Chi Phillip Yam, Fei Lung Yuen, Yiyang Zhang: Concave distortion risk minimizing reinsurance design under adverse selection, *Insurance: Mathematics and Economics*, 91(2020), 155–165, <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.02.001>
- Matthias A. Fahrenwaldt, Chaofan Sun: Expected utility approximation and portfolio optimization, *Insurance: Mathematics and Economics*, 93(2020), 301–314, <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.05.010>
- Juuso Liesiö, Peng Xu, Timo Kuosmanen: Portfolio diversification based on stochastic dominance under incomplete probability information, *European Journal of Operational Research*, 286(2020), 755–768, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.03.042>
- Fangda Liu, Jun Cai, Christiane Lemieux, Ruodu Wang: Convex risk functionals: Representation and applications, *Insurance: Mathematics and Economics*, 90 (2020), 66–79, <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.10.007>
- Zhe Sun, Xiaoqi Yang: A generalized Newton method for a class of discrete-time linear complementarity systems, *European Journal of Operational Research*, 286 (2020), 39–48, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.03.058>

---

**Titel: Krylov-deelruimte-methoden**

Promotor: prof. Marnix Van Daele

vak: Numerieke analyse

Krylov-deelruimte-methoden zijn iteratieve methoden die worden gebruikt bij het oplossen van tal van problemen uit de numerieke lineaire algebra:

- om grote stelsels lineaire vergelijkingen op te lossen, bvb. CG (conjugate gradient) of GMRES (Generalized minimal residual method)
- om eigenwaarden te bepalen van grote matrices (Arnoldi en Lanczos)
- om de exponentiële van een matrix te benaderen

Het idee is dat de oplossing gezocht wordt in een Krylov-deelruimte. Een Krylov deelruimte, gegenereerd door een matrix  $A$  en een vector  $b$ , wordt opgespannen door de vectoren  $b, Ab, A^2 b, \dots$ . Het doel van dit bachelorproject is om enkele van deze algoritmen te bestuderen en te bespreken.

Referenties:

- S. Fan, An Introduction to Krylov Subspace Methods <https://arxiv.org/pdf/1811.09025v1.pdf>
  - Ilse C.F. Ipsen and Carl D. Meyer, The Idea Behind Krylov Method <http://www.maths.lth.se/na/courses/NUM115/NUM115-05/krylov.pdf>
-

## Titel: Companion, colleague, comrade en aanverwante matrices

Promotor: prof. Marnix Van Daele  
vak: Numerieke analyse

In dit bachelproject leggen we een verband tussen veeltermen en matrices.

Om de eigenwaarden van een  $n \times n$  matrix  $A$  te bepalen, wordt de karakteristieke vergelijking bepaald:  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Dit geeft aanleiding tot een  $n$ -de graadsveelterm, waarvan de nulpunten precies de eigenwaarden zijn. Omgekeerd kan men, gegeven een veelterm van graad  $n$  met hoogste graadscoëfficiënt gelijk aan 1, een  $n \times n$  matrix construeren waarvan de karakteristieke veelterm precies gelijk is aan deze veelterm. Dit leidt tot de zogenaamde companion matrix: een matrix met allemaal nullen, behalve op de eerste subdiagonaal (daar staan 1-en) en de laatste kolom (daar staan, op het teken na, de coëfficiënten van de veelterm).

In de (numerieke) lineaire algebra zijn er verschillende algoritmen die steunen op de companion matrix. Zo bvb. worden nulpunten van een veelterm in matlab steeds berekend als eigenwaarden van de bijhorende companion matrix.

Veeltermen kunnen voorgesteld worden in verschillende basissen. De meest voor de hand liggende basis is  $1, t, t^2, \dots$  maar men kan ook kiezen voor bvb. basissen van orthogonale veeltermen. Wanneer men dan de karakteristieke veelterm voorstelt in een basis van Chebyshev-veeltermen spreekt men niet meer over de companion matrix, maar over de colleague matrix. In andere basissen spreekt men dan weer over comrade matrices.

Het doel van dit bachelorproject is de eigenschappen van en verbanden tussen deze matrices te bestuderen en om enkele (al dan niet numerieke) algoritmen te bespreken waarin deze matrices voorkomen.

Referenties:

- S. Barnett, Congenial matrices, *Linear Algebra Appl.*, 41 (1981), pp. 277-298
- J.P. Boyd, Finding the Zeros of a Univariate Equation: Proxy Rootfinders, Chebyshev Interpolation, and the Companion Matrix, *SIAM REVIEW* Vol. 55, No. 2, pp. 375–396, 2013 <https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/110838297>
- Aurentz, J.L., Vandebril, R. & Watkins, D.S. Fast computation of eigenvalues of companion, comrade, and related matrices. *Bit Numer Math* **54**, 7–30 (2014). <https://doi.org/10.1007/s10543-013-0449-x>

---

## Titel: Maximum likelihood characterization of distributions

Promotor: Christophe Ley  
Vak: Statistiek

Parameter estimation via the maximum likelihood method is a classical topic in statistics. In particular, it is well-known that the maximum likelihood estimator of the location parameter of a normal distribution is the sample average. Much less known is the fact that this actually allows to characterize the normal distribution: among all probability laws over the real line, the normal is the only one for which the sample average is always (meaning, for any sample  $x_1, \dots, x_n$  of a fixed sample size  $n > 2$ ) the maximum likelihood estimate of the location parameter. This characterization result can be traced back to none else than the famous Carl Friedrich Gauss!

In the present project, the student will have to understand this characterization of the normal distribution (which involves tools from analysis as well as probability), search the literature for potential characterizations of other well-known probability laws,

and finally get a glimpse of the historical developments that led to the "invention" of the normal distribution AKA Gaussian distribution.

---

### **Titel: Sparse principal component analysis**

Promotor: Stijn Vansteelandt

Vak: Statistiek III (voor studenten met interesse in onderzoek en data-analyse)

Het combineren van de lasso met principale componenten analyse laat toe om efficiënt de voornaamste principale componenten te selecteren in een regressie-analyse. In dit project zullen we een literatuurstudie uitvoeren van deze techniek. Vervolgens zullen we via simulatiestudies en analytisch inzicht nagaan in welke mate deze techniek goed in staat is om correctie voor confounding in lineaire regressie te faciliteren, en hoe de resultaten zich verhouden tot het gebruik van ridge regressie of de lasso.

---

### **Titel: Cross-fitting**

Promotor: Stijn Vansteelandt

Vak: Statistiek III (voor studenten met interesse in onderzoek en data-analyse)

Cross-fitting is een sterk opkomende techniek die verwant is aan cross-validatie, maar zich eerder focust op de bepaling van het effect van een blootstelling. Hierbij wordt een dataset in stukken opgedeeld, waarbij het ene stuk wordt gebruikt voor modelbouw, en het andere stuk voor de evaluatie van het blootstellingseffect. Op dit ogenblik is er veel onduidelijkheid rond het eventuele belang en de mogelijke nadelen van cross-fitting, en hoe dit idealiter wordt toegepast (bvb. hoe wordt de dataset het best opgedeeld?). In dit bachelorproject zullen we dit onderzoeken bij gebruik van double selection voor de selectie van confounders, zowel d.m.v. simulatie als analytisch onderzoekswerk toegepast op OLS schatters.

---